

第五章 高斯滤波器

5.1 介绍

高斯滤波器被广泛应用于表面轮廓分析。美国标准（美国机械工程师协会 2002）和国际标准（国际标准化组织 1996）都对它进行了阐述。高斯滤波器的权重函数（滤波器在时域和空间域的定义）如下：

$$S(x) = \frac{1}{\alpha\lambda_c} \exp\left[-\pi\left(\frac{x}{\alpha\lambda_c}\right)^2\right] \quad 5.1$$

式子中 $\alpha = \sqrt{\ln 2 / \pi} = 0.4697$, x 是权重函数距离原点的位置, λ_c 是粗糙度中长波波长的截止频率。

通过对连续函数 $S(x)$ 进行傅里叶变换可以得到函数的传递特性, 变化如下:

$$Sf(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha\lambda_c} e^{[-\pi(\frac{x}{\alpha\lambda_c})^2]} e^{i\lambda x} dx = e^{[-\pi(\alpha\frac{\lambda_c}{\lambda})^2]} \quad 5.2$$

从等式 5.2, 能够看出该正弦波振幅有衰减, 其波长截止波长 ($\lambda = \lambda_c$) 是 0.5, 因此在截止处, 滤波器传递了 50%。下面的例子展示了, 在给定权重函数下, 其高斯滤波器传递曲线的样子。

范例 5.1 在给定空间域 $\lambda_c \leq x \leq \lambda_c$ 下, 描绘高斯滤波器 S 。其中让 $\lambda_c = 0.8 \text{ mm}$, 采样间隔 $\Delta x = 1 \mu\text{m}$ 。

下面是 MATLAB 生成的代码, 并且其所描述的图展示在(图 5.1 a)。

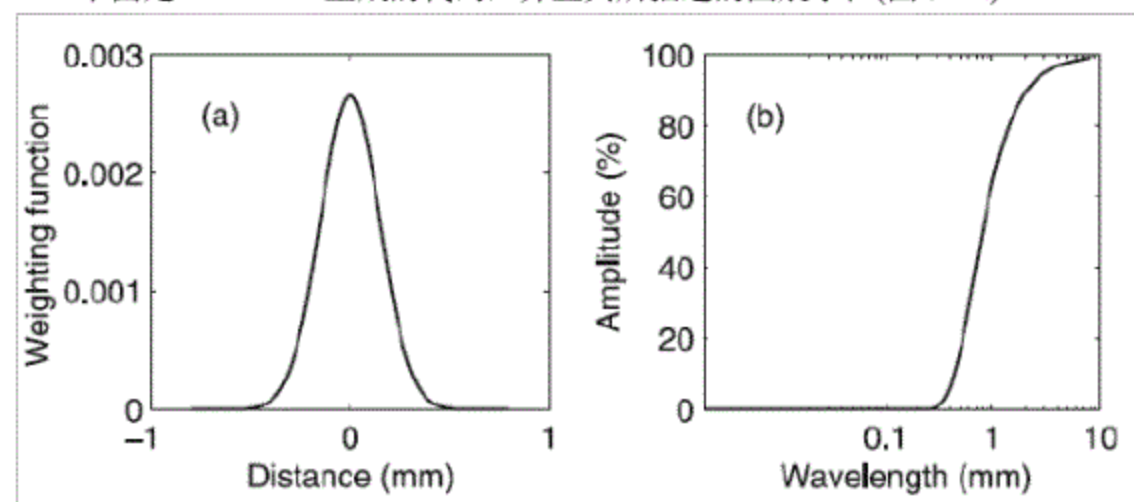


图 5.1 a 绘制高斯滤波器: $\lambda_c = 0.8 \text{ mm}$, b 高斯滤波器传递特性

```
lambdac=0.8; % in mm
dx=0.001; % in mm
x=(-lambdac:dx:lambdac)';
alpha=0.4697;
S=(1/(alpha*lambdac)).*exp(-pi*(x/(alpha*lambdac)).^2);
% generate the Gaussian filter
S=S/sum(S); % normalize to unit sum
plot(x,S);
xlabel('Distance (mm)');
ylabel('Weighting function');
```

范例 5.2 产生高斯滤波器 S 的振幅传输特性, 并且评估正弦波的振幅传输特性, 其截止波长($\lambda_c=0.8\text{mm}$)。

高斯滤波器的传递特性能够同样获得, 通过借助第四章 4.4 范例所示的矩形滤波器例程。传递特性如图 5.1b 所示。该正弦波由 0.8mm 波长组成, 其振幅衰减为 $0.5(S_f$ 的阵列元素有 11 个)。因此高斯滤波器在截止频率处, 传输量为 50% 。注意在图 5.1b 所示的传递特性中, 可以清楚的看到, 在其截止频率处有一个坡度过程, 并没有直上直下的锋利过渡。这意味着滤波器不能立刻抑制所有波长小于截止频率的波长, 而是在截止频率处使它们逐渐变弱。这个传递特性也能够被描述通过直接对等式 5.2 采样。

```
m=size(S,1); % length of Gaussian filter
l=8; % length of a profile is assumed to be 8 mm
n=l/dx; % number of profile points
S=[zeros(n/2-floor(m/2),1); S; zeros(n/2-floor(m/2)-1,1)];
% center the filter and zero-pad to 8000 long
Sf=fft(S); % DFT of S
j=(2:1:floor(n/2)+1)'; % generate wavelength array for X axis of
% transmission plot
wave=n*dx./(j-1);
semilogx(wave,100*abs(Sf(2:floor(n/2)+1,1)));
xlabel('Wavelength (mm)');
ylabel('Amplitude (%)');
```

5.2 高通和低通滤波器

迄今为止描述的滤波器都是低通滤波器, 因为它只能传递低频部分(波长大于截止波长)。第 3 章和第 4 章所描述的矩形滤波器和步进滤波器也都是低通滤波器。低通滤波器是一个平均滤波器因为它能产生一个光滑的轮廓。一个滤波器也能够被设计成只传输高频的信号。这种滤波器是众所周知的高通滤波器。高斯高通滤波器的传递特性如下

$$Sf(\lambda) = 1 - e^{(-\pi(\frac{\lambda_c}{\lambda})^2)} \quad 5.3$$

这个高通高斯滤波器在截止波长处也传递 50% 。这是很重要的, 因为它阐释了高斯低通和高通在传递上的互补性。这可以表明高频信号与低频信号的差异仅仅表现在原始轮廓。因此用两种不同滤波器同时捕捉高频和低频信号是没有必要的。

5.3 用高斯滤波器量化粗糙度、波纹度和形状

滤波器的输出是粗糙度, 波纹度还是形状(三者为专业术语), 取决于滤波器的类型(高通或者低通)和截止波长的阈值。如之前第 3 章所述, 因为粗糙度, 波纹度还是形状都有自己明确定义的带宽范围, 所以构造带宽的上限和下限截止波长要符合各自要求。ASME B46.1 标准中定义截止波长 λ_{cw} 作为波纹度的长波截止波长, λ_{sw} 作为波纹度的短波截止波长, λ_c 作为粗糙度的长波截止波长, λ_s 作为粗糙度的短波截止波长。 λ_c 的选择等于 λ_{sw} 。ASME B46.1 与 ISO 11562 两者都已经给出了截止波长的推荐阈值。除此之外, 他们也提供了进一步的指导对于截止比率的选择。例如, 选择 λ_c 与一个适当的 λ_c/λ_s 比率将限制探针的大小(美国机械工程师协会 2002)。

滤波器与截止波长 λ_s 相关联构成低通滤波器, 与此相对应滤波器与截止波

长 λ_c 相关联, 则构成一个高通滤波器。上述这对滤波器应用到轮廓上输出的是粗糙度。如果想获得波纹度需要调整到 λ_{sw} (低通) λ_{cw} (高通)。形状通常包含了所有大尺寸波长, 因此下端的截止波长为 λ_f , 通常来说这样就足够了。但值得注意的是在 ASME B46.1 标准中并没有定义 λ_f 。图 5.2 举例说明了上述滤波器的不同。

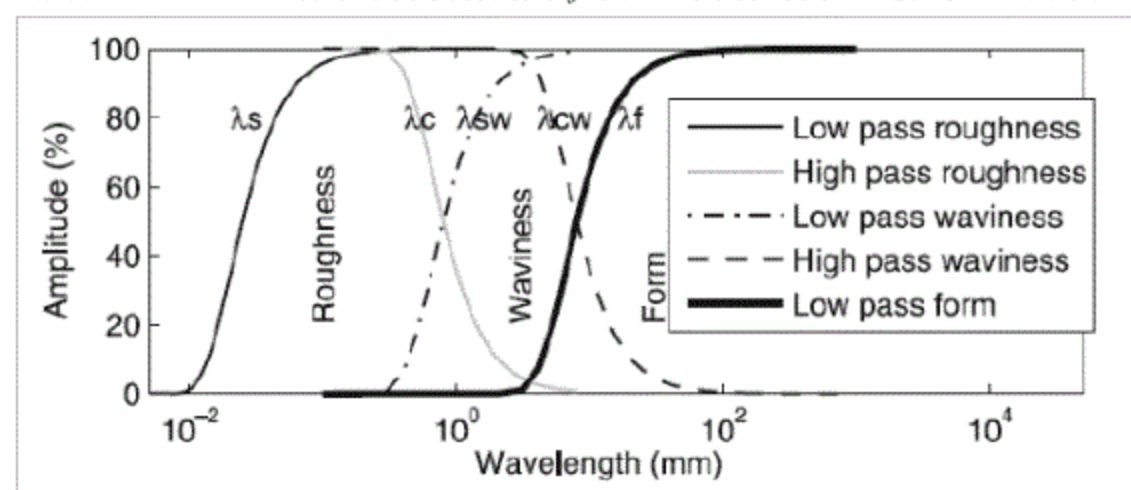


图 5.2 划分粗糙度轮廓、波纹度轮廓、形状轮廓的五种滤波器的传递特性

($\lambda_s=25\mu\text{m}$, $\lambda_c=0.8\text{mm}$, $\lambda_{sw}=0.8\text{mm}$, $\lambda_{cw}=8\text{mm}$, $\lambda_f=8\text{mm}$)

综上所述, 很显然根据粗糙度或者波纹度的定义, 我们需要两个滤波器同时操作来获得。然而事实上有些简单化的公共认可, 这样通过一个信号的滤波操作也可以简单的获得粗糙度或者波纹度。首先, 截止波长为 λ_s 的低通滤波器有时可以被忽略, 或者用自动滤波器仪器的初始数据。其次一种情况是, 轮廓长度通常并没有足够的长度去捕捉形状, 因此截止波长 λ_{cw} 的高通滤波器并没有用到。最后一种状况是, 在第 5.2 部分已经有所提及, 利用高斯低通和高通滤波器的互补定义, 可以用一个滤波器来评估粗糙度和波纹度(截止波长 λ_c 的高通或者低通)。

总的来说, 粗糙度轮廓能够通过用一个截止波长为 λ_c 的高通滤波器去过滤原始轮廓来获得。波纹度轮廓与原始轮廓和粗糙度轮廓的区别是很简单的。在原始轮廓上应用高斯低通滤波器 λ_{sw} 就以获得波纹度的表面轮廓。同样的这也是粗糙度轮廓与波纹轮廓和原始轮廓之间的区别。无论怎么做, 两者产生的结果是一样的。

5.4 截止波长的影响

当 λ_c 增加, 粗糙度轮廓的带宽将变大, 因此应该增加振幅参数, 例如 R_a , 来计算粗糙度轮廓。另一方面, 同样的截止波长将导致波纹度轮廓中的一些波长被移除, 作为这个结果应该在计算波纹度轮廓时, 减小振幅参数 W_a

5.5 相位特性

我们已经非常详细的研究了高斯滤波器的振幅传递特性, 但是对于相位特性我们还没有提及。高斯滤波器并不会使两个不同波长的正弦波产生相对的相位改变。换句话说, 每一个进入滤波器的正弦波形都会复现它进入时的相位特性, 并不会发生相位改变。这种相位不变的特性, 也正是高斯滤波器的最大优点。

5.6 总结

高斯滤波器可能是今天被用的最广泛的滤波器。我们本章复习了它的定义和实现方法。我也讨论了高通和低通滤波器的定义。而且我们还讨论了高斯高通和低通滤波器是如何互补的, 因此用两个滤波器操作获得粗糙度和波纹度是多余的。高斯滤波器的相位不变性, 使得它的输出不会扭曲变形。

练习

5.1 通过对公式 5.2 的连续采样生成一个高斯低通滤波器曲线。假设 $\lambda_c=0.8\text{mm}$, 采样间隔 $\Delta x = 1 \text{ mm}$ 和图 5.1 b 对比两者相同吗?

5.2 生成一个如图 5.2 所示的图, 假设轮廓长度是 $1,000\text{mm}$, 采样间隔为 $\Delta x = 1 \text{ mm}$ 截止波长参考图 5.2 所示。

5.3 写一个高斯函数文件 `myGaussian.m`, 调用该函数需要给两个参数——间隔和截止波长 (两者单位相同), 然后函数产生一个高斯低通滤波器, 这个高斯函数是经过归一化的, 为了使所有的权重统一。

5.4 用截止波长 0.8mm 的高斯低通滤波器滤波 2mm 波长振幅为 1 mm 的曲线 z_1 , 利用高斯滤波器的振幅传递曲线观察振幅衰减情况。采样间隔参数为 $\Delta x = 1 \text{ mm}$ 用同样的滤波器滤波 0.5mm 波长振幅为 0.5 mm 的曲线 z_2 , 观察其振幅衰减状况。

5.5 根据练习 5.4 和已知高斯滤波器的相位特性, 计算并绘制滤波输出, 高斯滤波器的滤波轮廓为练习 5.4 讨论的两个正弦波之和。

5.6 用空间卷积验证练习 5.4 的结果。并用 5.3 制作的高斯滤波函数生成这个滤波器。

5.7 用频域积分验证练习 5.4 的结果。为了这个窗口能均匀排放这 8000 长度的数组, 需要在高斯滤波器的空间域填补零点。然后对滤波器和轮廓执行 DFTs, 进行逐项积分。用反向 DFT 进行评估并提取相关部分补偿相位 (看 4.6 的例子)。这个波纹度轮廓一定是和 5.5 与 5.6 中产生的轮廓相同, 除了在边缘上可能有少许差别。

5.8 用空间卷积方法过滤练习 3.1 中的轮廓 z , 用三种不同截止波长的低通高斯滤波器, 分别是 0.5mm , 0.8mm 和 2mm 。从波纹度轮廓 w 上截取截止长度的一半。计算波纹度轮廓 w 中的 Wa 。其中 Wa 被定义为 $Wa = \frac{\sum_{i=1}^n |w(i)|}{n}$, $w(i)$ 是波纹度数组的第 i 个元素, n 是数组 w 的长度。随着截止波长的增加是 Wa 增加还是减小, 为什么?

参考文献

美国机械工程协会 2002, *ASME B46.1-2002*, 表面纹理 (表面粗糙度, 波纹度和花纹), ASME, 美国. 纽约

国际标准化组织 1996, *ISO 11562:1996*, 几何产品规格 (GPS)-表面纹理: 轮廓方式-滤波器相位调整特性 ISO, 瑞士, 日内瓦

第 6 章 2RC 滤波器

6.1 引言

最早用于表面测量的滤波器是 2RC 滤波器。这种滤波器早期由硬件构成，现在已经可以方便使用软件执行。2RC 滤波器并不是一个线性相位的滤波器，并且对粗糙度和波纹度两个滤波器需要区分来看待。尽管 2RC 滤波器很早就被应用于表面轮廓滤波，但是却在高斯滤波器之后来讨论它，是因为这种滤波器在执行时更具有挑战性的问题存在。ASME B46.1 标准(美国机械工程协会 2002)对 2RC 滤波器有所提及，但是国际标准中并没有涉及该滤波器。

6.2 2RC 高通滤波器

从历史上来看，2RC 滤波器仅仅被用于从原始轮廓中提取粗糙度轮廓，因此文献报道中一般仅提供了 2RC 的粗糙度滤波器的权重函数。为了获取表面的波纹的轮廓，需要一个单独的波纹度权重函数(看练习 6.1)。高通粗糙度滤波器的权重函数如下：

$$S(x) = \frac{A}{\lambda_c} (2 - \frac{A}{\lambda_c} |x|) \exp(-\frac{A}{\lambda_c} |x|) \quad 6.1$$

其中 $A=3.64$ ， x 是权重函数距离原点的位置， λ_c 是粗糙度长波的截止波长。高通滤波器的传递特性可以通过对其连续传递函数 $S(x)$ 做傅里叶变换可以获得：

$$Sf(\lambda) = (1 - jk \frac{\lambda}{\lambda_c})^{-2} \quad 6.2$$

其中 $k=1/\sqrt{3}$ 并且 $j=\sqrt{-1}$ 。等式 6.1 的权重函数是很重要的。权重函数提供了一个轮廓的高频组成部分，但是空间卷积也是很重要的，它是一个平均处理的过程。对等式 6.1 的权重函数进行卷积，将得出一个“二等分线”。二等分线和粗糙度轮廓是有区别的。然而从公式 6.1 并不能很清楚的看出两者的区别，如果读者对此很感兴趣，可以看 6.3 节，此节将对这个问题作出解释。

2RC 滤波器在截止波长处的振幅衰减是 75%。从公式 6.2 推断此时 $\lambda=\lambda_c$ 。并且滤波器不具有相位不变的特性。这意味的不同波长的正弦波其输出相位会有不同程度的偏移量。这将导致在输出轮廓上出现失真，因此这并不是一个有用的特性。尽管受此限制 2RC 滤波器仍然被用了许多年，因为那时候的数字滤波器不能识别表面轮廓的起点。下面的例子展示了 2RC 滤波器的这些方面。

例子 6.1 绘制权重函数，振幅传输图，高通 2RC 滤波器的相频特性图。假设截止波长 $\lambda_c=0.8\text{mm}$ 。

2RC 滤波器的权重函数被生成在 $-2\lambda_c \leq x \leq 0$ ，因为这个滤波器关于原点并不对称。事实上，滤波器在零点前沿是单边的。

传递特性能够用很多种方式生成，在这个例子中，我们将直接对公式 6.2 采样。图 6.1 a-c 分别展示了 2RC 滤波器的权重函数、振幅传输和相频特性。

```
lambdac = 0.8; % 截止波长单位 mm
dx = 0.001; % 间隔单位 mm
A = 2 * pi/sqrt(3);
x = (-2 * lambdac:dx:0)'
```

```

for j=1:length(x)                                % 生成权重函数
S(j,1)=(A/lambdac) * (2-(A/lambdac)*abs(x(j)))*
exp(-(A/lambdac) * abs(x(j)));
end
S = S/sum(S);                                    % 单位归一化处理
plot(x,S)
xlabel('Distance (mm)');
ylabel('Weighting function');
lamda = (0.002:0.001:8)';                        % 生成波长轴
Sf = (1-i * 1/sqrt(3)). * (lamda/lambdac).^(-2);

semilogx(lamda,100*abs(Sf));                      % 对公式6.2连续采样
% 取绝对值
% amplitude transmission
xlabel('Wavelength (mm)');
ylabel('Amplitude (%)');                         % 绘制振幅用“%”
semilogx(lamda, angle(Sf));                      % 用角度绘制相位
xlabel('Wavelength (mm)');
ylabel('Phase (radians)');                       % 绘制相位单位弧度

```

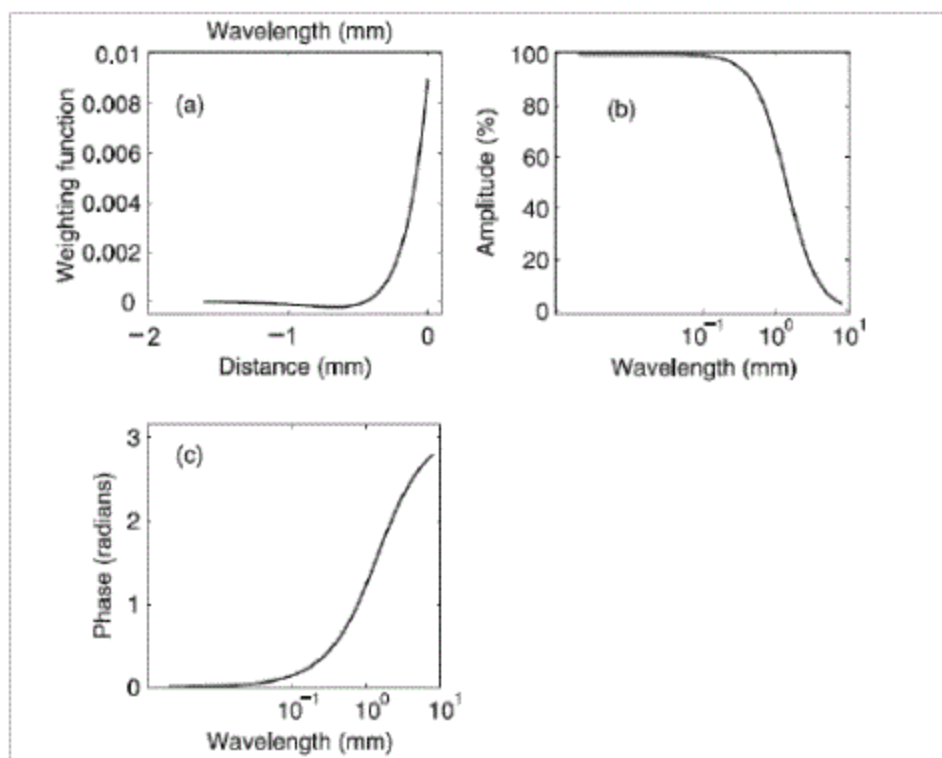


图 6.1 a 两电阻两电容(2RC)滤波器的权重函数 b 振幅传输特性 c 相位特性

例子 6.2 用截止波长为 0.8mm 高通 2RC 滤波器，按 3.1 范例中所述的空间卷积方法生成一个滤波轮廓 z

2RC 高通滤波器关于原点并不对称。因此这个滤波器不得不在卷积的时候做一个关于原点的镜像来完成卷积过程(回想一下卷积镜像操作的定义：用这个建立的镜像来做卷积和多项式相乘)。并且卷积后的轮廓长度为 $n+m-1$ ，其中 n 是原始轮廓的长度， m 是滤波器数组的长度。就对称的滤波器来说，来自卷积阵列